Trimestre Abril-Julio 2009
Departamento de Cómputo Científico y Estadística
Estadística para Ingenieros — CO3321
Respuestas guía teórica # 2
Distribuciones muestrales y Teorema Central del límite

Respuestas

1. Sea Y= cantidad de líquido (onzas) que vierte una máquina embotelladora, por hipótesis $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 1)$. Se eligen $n = 9$ botellas aleatoriamente de la producción de la máquina, y se encuentra que: $P(|\overline{Y} - \mu| \leq 0{,}3) = 0{,}6318$.
   a) Si $n = 16$. ¿Cuál es el valor de $P(|\overline{Y} - \mu| \leq 0{,}3)$?

$$\begin{aligned} P\left(|\overline{Y} - \mu| \leq 0{,}3\right) &= P\left(|Z| \leq \frac{0{,}3 \times \sqrt{16}}{\sigma}\right) \\ &= P(|Z| \leq 1{,}2) \\ &= 0{,}7698 \end{aligned}$$

   b) Si $n = 35$, entonces $P(|Z| \leq 1{,}5) = 0{,}8664$. Si $n = 36$, entonces $P(|Z| \leq 1{,}8) = 0{,}9282$. Para $n = 49$, entonces $P(|Z| \leq 2{,}1) = 0{,}9642$. Y si $n = 64$, entonces $P(|Z| \leq 2{,}4) = 0{,}9836$
   c) A medida que el tamaño de muestra aumenta, también lo hace la probabilidad de que la media muestral $(\overline{Y})$ se encuentre dentro de 0.3 onzas de la media verdadera μ.

2. Se considera otra vez Y= cantidad de líquido (onzas) que vierte una máquina embotelladora. Pero ahora, $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 2)$.
   a) Para $n = 9$, ¿Cuál es el valor de $P(|\overline{Y} - \mu| \leq 0{,}3)$?

$$\begin{aligned} P\left(|\overline{Y} - \mu| \leq 0{,}3\right) &= P\left(|Z| \leq \frac{0{,}3 \times \sqrt{9}}{2}\right) \\ &= P(|Z| \leq 0{,}45) \\ &= 0{,}3472 \end{aligned}$$

   Se observa que esta probabilidad es inferior a la obtenida en el mismo caso del ejercicio 1, consecuencia de haber aumentado la desviación estándar.
   b) Análoga a los casos anteriores

3. Sea X= logaritmo natural de cada medición de CL50. Por hipótesis $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 0{,}4)$ y $n = 10$. Hay que calcular $P(|\overline{X} - \mu| \leq 0{,}5)$.

$$\begin{aligned} P\left(|\overline{X} - \mu| \leq 0{,}5\right) &= P\left(|Z| \leq \frac{0{,}5 \times \sqrt{10}}{0{,}4}\right) \\ &= P\left(|Z| \leq 2{,}5\right) \\ &= 0{,}9876 \end{aligned}$$

4. Sea X= resistencia (en miles de libras por pulgada cuadrada) a la ruptura del vidrio templado. Se sabe que $\mu = 14$ y $\sigma = 2$.
   a) $P\left(\overline{X} > 14{,}5\right) = P\left(|Z| > \frac{(14{,}5-14)\times\sqrt{100}}{2}\right) = P(Z > 2{,}5\Big) = 0{,}0062$
   b) $P\left(e < \overline{X} < d\right) = 0{,}95$. Estandarizando, $P\left(\frac{(e-14)\times\sqrt{100}}{2} < Z < \frac{(d-14)\times\sqrt{100}}{2}\right) =$ 0,95. Al buscar en la tabla de la normal estándar, se obtiene que el cuantil correspondiente sería igual a $\pm 1{,}96$, por lo que el valor de e se obtiene despejando de la siguiente ecuación

   $$\frac{(e-14)\times\sqrt{100}}{2} = -1{,}96 \Longleftrightarrow e = 13{,}608$$

   y el d se despeja de la ecuación análoga y da como resultado d=14.392. Finalmente, el intervalo pedido sería $\overline{X} \in (13{,}608, 14{,}392)$

5. Sean X= tiempo (en minutos) que tarda un cajero en registrar la mercancía de cada cliente. Los X_i, para $i = 1, \ldots, n$ son independientes. Además, $\mu_X = 2{,}5$ y $\sigma_X = 2$. ¿$P\left(\sum_{i=1}^{100} x_i > 240\right)$? (Se transformó 4 horas en minutos). Como $n = 100$ es "grande", por el Teorema del Límite Central sabemos que $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu_X, \frac{\sigma^2}{n})$, por lo cual se puede aproximar la probabilidad pedida como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{100} x_i > 240\right) &= P\left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} > \frac{240}{100}\right) \\ &= P\left(\overline{X} > 2{,}4\right) \\ &\approx P\left(Z > \frac{(2{,}4 - 2{,}5)\sqrt{100}}{2}\right) \\ &= P\left(Z > 0{,}5\right) = 0{,}3085 \end{aligned}$$

6. Continuando con el ejercicio 5, calcular n para que $P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < 120\right) \cong 0{,}1$. De nuevo, se trata de aplicar el TLC, con lo cual:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < 120\right) &= P\left(\overline{X} < \frac{120}{n}\right) \\ &\cong P\left(Z < \frac{\left(\frac{120}{n} - 2{,}5\right) \times \sqrt{n}}{2}\right) = 0{,}1 \end{aligned}$$

Se busca en la tabla de la normal el cuantil tal que el área a la izquierda sea de 0.1, este es $z = -1{,}28$, y entonces se despeja n de la siguiente ecuación:

$$\frac{\left(\frac{120}{n} - 2{,}5\right) \times \sqrt{n}}{2} = -1{,}28$$

Resultando $n_1 = 42$ y $n_2 = 56$. La solución es $n = 56$. (Para resolver la ecuación utilice el cambio $u^2 = n$).

7. Sea $X=$ número de adultos encuestados que se interesarían en un nuevo producto. Sabiendo que $p = 0{,}35$,
   a) Hallar el menor valor de n para el cual $P\left(|\hat{p} - p| < 0{,}02\right) > 0{,}9$.

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{|\hat{p} - p|}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < \frac{0{,}02}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) > 0{,}9 \\ \Rightarrow\ & P\left(|Z| < \frac{(0{,}02 \times \sqrt{n})}{0{,}47696}\right) > 0{,}9 \\ \Rightarrow\ & P\left(|Z| < 0{,}04193\sqrt{n}\right) > 0{,}9 \\ \Rightarrow\ & 1{,}28 = 0{,}04193\sqrt{n} \Rightarrow n \geq 932. \end{aligned}$$

   b) Se usaría $p = \frac{1}{2}$ porque $\sigma^2 = \frac{pq}{n}$ es máximo en ese punto.

NP/ig